

Signalverarbeitung in der Nachrichtentechnik – Digitale Signalverarbeitung, Basics

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 1 Digitale Signalverarbeitung, Basics
 - Signale und Fourier-Transformation
 - Das Abtasttheorem
 - Diskrete Signale und zeitdiskrete Fourier-Transformation
 - Die z-Transformation
 - Systemtheorie zeitdiskreter Systeme
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur

- Die folgenden Betrachtungen wiederholen in Kürze Aspekte der digitalen Signalverarbeitung. Sie erheben jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Ausführlicher finden sich diese in Lehrbüchern der Signalverarbeitung bzw. in der Vorlesung „Signale und Systeme“
- Mathematisch korrekte Definitionen erfordern Kenntnisse aus der Maßtheorie, die nicht Gegenstand dieser Vorlesung sein sollen. Derartige Betrachtungen findet man in:

[Gal08]: R. Gallager, *Principles of Digital Communications*, Cambridge University Press, 2008

[Lap09]: A. Lapidoth, *A Foundation in Digital Communications*, Cambridge University Press, 2009

- Signale werden durch Kleinbuchstaben ($x(t)$, $x[n]$), deren Bildbereiche durch Großbuchstaben ($X(z)$, $X(f)$, $X[k]$) gekennzeichnet.
- Runde Klammern symbolisieren kontinuierliche Variablen/Wertebereich, eckige Klammern symbolisieren diskrete/abgetastete Größen.
- Vektoren des \mathbb{C}^n oder des \mathbb{R}^n werden durch kleine fettgedruckte Buchstaben gekennzeichnet; Bsp.: $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$
- Matrizen aus $\mathbb{C}^{n \times n}$ werden durch große fettgedruckte Buchstaben gekennzeichnet; Bsp.: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$
- Die komplexe Konjugation wird als \mathbf{x}^* , \mathbf{A}^* geschrieben, während komplexe Konjugation bei gleichzeitiger Transposition mit $\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T$ notiert wird.



- 1 Digitale Signalverarbeitung, Basics
 - Signale und Fourier-Transformation
 - Das Abtasttheorem
 - Diskrete Signale und zeitdiskrete Fourier-Transformation
 - Die z-Transformation
 - Systemtheorie zeitdiskreter Systeme
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



■ Definitionen:

- Ein (zeitkontinuierliches) *Signal auf* $I \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Abbildung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ oder $x : I \rightarrow \mathbb{C}$.
- Die Menge der Signale mit *endlicher Energie* auf I wird bezeichnet als

$$L_2(I) := \left\{ x : I \rightarrow \mathbb{C} : E_x := \int_I |x(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Meist wird $I = \mathbb{R}$ sein, dann schreiben wir $L_2 := L_2(\mathbb{R})$.

- Ein Signal hat *endliche Leistung*, falls

$$0 < P_x := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt < \infty.$$



■ Bemerkungen:

- Aufgrund der Forderung $P_x > 0$ haben Signale endlicher Leistung keine endliche Energie.
- $L_2(I)$ kann zu $L_p(I)$ verallgemeinert werden:

$$L_p(I) := \left\{ x : I \rightarrow \mathbb{C} : \int_I |x(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

Falls I (der Urbildbereich von x) ein Intervall $[a, b]$, $a, b < \infty$ ist, kann gezeigt werden, dass $L_p(I) \subseteq L_q(I)$, $1 \leq q < p < \infty$; insbesondere $L_2(I) \subseteq L_1(I)$.

- Die Signale in L_2 bilden einen Vektorraum. Mit dem Innenprodukt

$$\langle x(t), y(t) \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt, \quad x(t), y(t) \in L_2$$

und der Norm

$$\|x(t)\| := \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}, \quad x(t) \in L_2,$$

wird L_2 ein Hilbertraum (ein Vektorraum mit Innenprodukt, der vollständig ist).

■ Bemerkungen:

- Mathematisch ist die Aussage nicht ganz korrekt. Um sicherzustellen, dass die Norm *wohldefiniert* ist, ist es entweder notwendig ein stetiges Signal x zu fordern oder –wie bereits bemerkt– in den Bereich der Maßtheorie vorzudringen. Beides wird der Einfachheit halber vermieden, aber *be aware*.
- Die Norm entspricht der Wurzel der Signalenergie, *nicht* der Energie des Signals, d.h., $E_x = \|x\|^2$.

- **Definition:** Die *Fourier-Transformation* eines Signals $x(t)$, geschrieben als $X(f) := \mathcal{F}\{x(t)\}$ oder $x(t) \circ \bullet X(f)$, und ihre Inverse ergeben sich zu¹

$$X(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$
$$x(t) := \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df.$$

¹ . . . falls das Integral existiert. Dies ist z.B. der Fall für L_1 Signale.

■ Bemerkungen:

- Schreibt man die Fourier-Transformation als Innenprodukt, $X(f) = \langle x(t), e^{j2\pi ft} \rangle$, so wird deutlich, dass $X(f)$ die Ähnlichkeit des Signals $x(t)$ mit einer komplexen Schwingung der Frequenz f angibt.
- Die Notation mittels der Frequenz f wird in der Nachrichtentechnik meist bevorzugt. In der Signalverarbeitung wird oft die Kreisfrequenz ω , d.h.,

$$X(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega,$$

verwendet.²

²Gelegentlich auch mit Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ in beiden Gleichungen.



■ Bemerkungen: (ctd.)

- Mit Hilfe der Maßtheorie kann gezeigt werden, dass für L_2 -Signale das *Theorem von Plancherel* gilt, welches (kurz gesagt) besagt, dass die Fourier-Transformation von L_2 Signalen existiert und das Signal über die Inversionsformel wiedergewonnen werden kann.
- Die Verwendung von L_2 Signalen verbietet die Verwendung von „Funktionen“ wie z.B. Sinussignalen oder Dirac'sche Delta-Funktion, so genannter *verallgemeinerter Funktionen* oder *Distributionen*.
In diesem Zusammenhang merkt [Gal08, p. 100+101] an:
 - „[. . .] when a finite-energy baseband waveform is modulated by that sinusoid up to passband, the resulting passband waveform has finite energy.“
 - „[. . .] there are many useful waveforms outside the finite energy class. Although they are not physical waveforms, they are useful models of physical waveforms when energy is not important.“

Meist werden Transformation von Distributionen als symbolische Notation verwenden, aber seien Sie sich der mathematischen Besonderheiten bewusst.

■ Eigenschaften:³

$$ax(t) + by(t) \circ \bullet aX(f) + bY(f)$$

Linearität

$$X(t) \circ \bullet x(-f)$$

Dualität

$$x(t - t_0) \circ \bullet X(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

Zeitverschiebung

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \circ \bullet X(f - f_0)$$

Frequenzverschiebung

$$x(t) \text{ reellwertig} \implies X(-f) = X^*(f)$$

Reellwertige Signale

³Übungen: Nachweis



■ Eigenschaften:⁴ ⁵

$$\int x(t - \tau)h(\tau)d\tau \circ \bullet X(f)H(f) \quad \text{Faltung}$$

$$x(t)w(t) \circ \bullet \int X(f - \nu)W(\nu)d\nu \quad \text{Fensterung}$$

$$\int x(t + \tau)y^*(t)dt \circ \bullet X(f)Y^*(f) \quad \text{Korrelation}$$

$$\int x(t)y^*(t)dt = \int X(f)Y^*(f)df \quad \text{Parseval}$$

⁴**Übung:** Nachweis. Hinweis: Zum Nachweis von Parseval nutzen Sie die Korrelationsformel.

⁵Bedenke, dass somit jede zeitliche Beschränkung eine Faltung im Frequenzbereich bewirkt!

- Parsevals Theorem mit $y(t) = x(t)$ ergibt

$$\int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df.$$

Da die linke Seite die Energie eines Signals beschreibt, bietet Parseval die Möglichkeit, die Energie durch Integration im Frequenzbereich zu berechnen. Deshalb heißt $|X(f)|^2$ die *spektrale Energiedichte*, *Energiedichtespektrum*, *energy spectral density (ESD)*.



■ Beispiele:

- Rechteck-Funktion und ihre Fourier-Transformation (**Übung:** Nachweis)

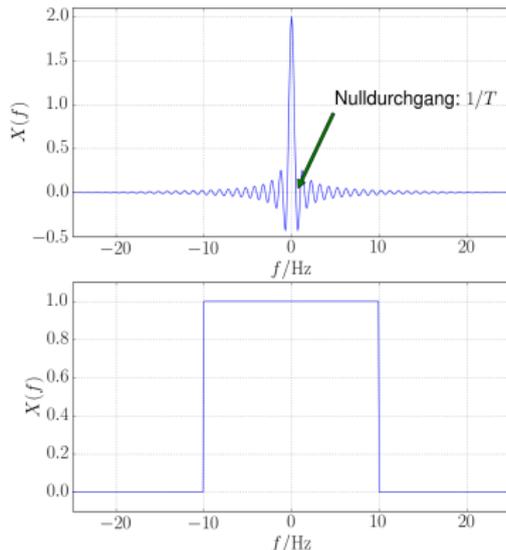
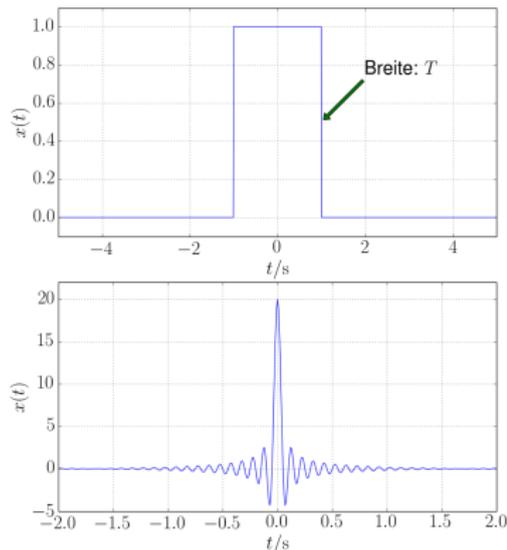
$$\text{rect}_T(t) := \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad T \cdot \text{si}(\pi T f) := T \cdot \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}$$

- Aufgrund Dualität folgt:

$$B \cdot \text{si}(\pi B t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \text{rect}_B(f) := \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0, & |f| > \frac{B}{2} \end{cases}$$



■ Beispiel: Rechteckpuls und Spektrum; Dualität



- **Problem:** Anwendung von Fourier erfordert Konvergenz des Integrals, z.B. $x(t) \in L_1$ oder $x(t) \in L_2$. Periodische Signale können dies nicht erfüllen.
- **Lösung:** (nach [Urk83])
 - Für ein Leistungssignal $x(t)$ definiere das gefensterete Signal

$$x_{2T}(t) := x(t) \cdot \text{rect}_{2T}(t).$$

- Da $x_{2T}(t)$ endliche Energie hat, besitzt es eine Fourier-Transformation $X_{2T}(f)$ und wir erhalten⁶:

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_{2T}(t)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_{2T}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_{2T}(f)|^2}{2T} df \end{aligned}$$

⁶ . . . angenommen, dass Integration und Grenzwert vertauscht werden können . . .

■ Lösung: (ctd.)

- Definiere die *gemittelte spektrale Leistungsdichte* als

$$\Phi_{xx}(f) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_{2T}(f)|^2}{2T}.$$

- Es kann gezeigt werden (**Übung**: Nachweis), dass

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \{ \Phi_{xx}(f) \} (\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_{2T}(f)|^2}{2T} e^{j2\pi f \tau} df \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) x^*(t) dt, \end{aligned}$$

entsprechend der *Autokorrelationsfunktion*.

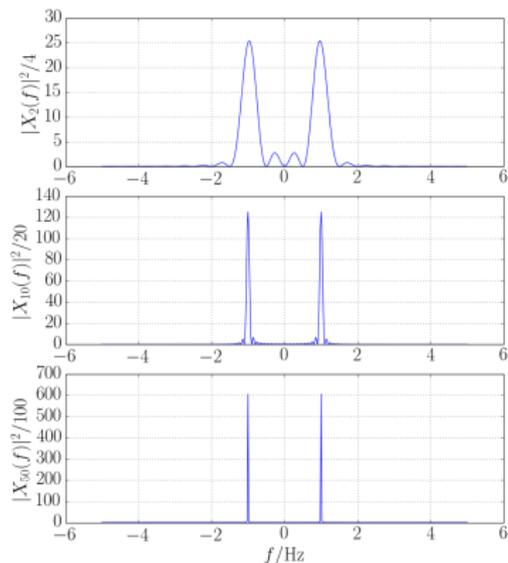
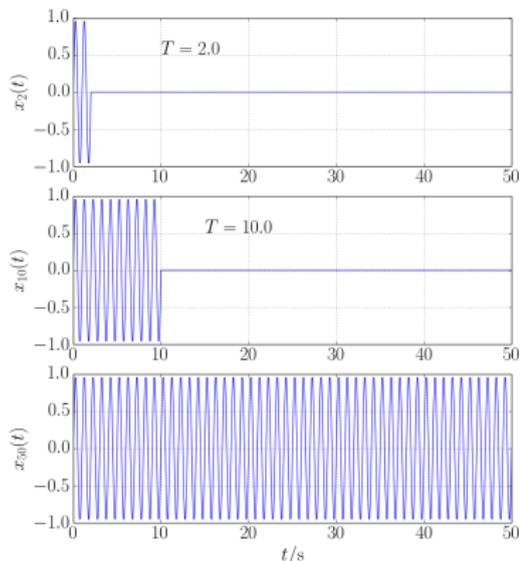
Theorem (Wiener-Khintchin)

Die spektrale Leistungsdichte, power spectral density (PSD), eines Leistungssignals entspricht der Fourier-Transformation der Autokorrelationsfunktion:

$$\Phi_{xx}(f) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_{2T}(f)|^2}{2T}$$
$$\bullet \text{---} \circ \quad \varphi_{xx}(\tau) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x^*(t)dt$$

Wegen $P = \varphi_{xx}(0) = \int \Phi_{xx}(f)df$ beschreibt die PSD die Verteilung der Leistung über der Frequenz.

- **Beispiel:** Betrachte Sinusfunktion $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ für verschiedene T :



- Die Korrelation für Energiesignale⁷ war definiert als:

$$\varphi_{xy}(\tau) := \int x(t + \tau)y^*(t)dt;$$

teilweise verwenden Lehrbücher

$$\tilde{\varphi}_{xy}(\tau) := \int x(t)y^*(t + \tau)dt = \int x(t - \tau)y^*(t)dt,$$

also wo ist der Unterschied (falls vorhanden)?

Diskussion: Begründen Sie obige Wahl mit Hilfe von modulierten Signalen, deren Autokorrelation und der (bisher “offiziell unbekanntem”) PSD für stochastische Prozesse.

⁷Analoges gilt für Leistungssignale.

- 1 Digitale Signalverarbeitung, Basics
 - Signale und Fourier-Transformation
 - **Das Abtasttheorem**
 - Diskrete Signale und zeitdiskrete Fourier-Transformation
 - Die z-Transformation
 - Systemtheorie zeitdiskreter Systeme
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur

■ Motivation:

- Physikalische Signale sind analog
- Analoge Signale müssen A/D gewandelt (abgetastet und digitalisiert) werden, um sie im Rechner zu bearbeiten
- Arbeite mit Samples statt mit zeitkontinuierlichen Signalen

■ Das Abtasttheorem . . .

- definiert die Voraussetzungen für Abtastung
- ist eine theoretische Aussage. Praktische Realisierung kann zu Fehlern führen
⇒ Abschätzung der auftretenden Fehler notwendig
- wird durch by A/D-Wandlung realisiert

Theorem⁸

Falls die stetige L_1 -Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[-W, W]$ bandbegrenzt ist, d.h. $X(f) = 0, |f| \geq W$, dann wird $x(t)$ durch Abtastwerte der Rate $2W$, entsprechend einer Abtastzeit von $t_s = \frac{1}{2W}$ vollständig beschrieben. Das Signal kann über

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \text{si}(\pi \cdot 2W \cdot (t - nt_s))$$

mit Samples $x[n] := x(nt_s)$ rekonstruiert werden.

⁸Das Theorem wird meist Shannon zugeschrieben, der dessen Anwendbarkeit in der Nachrichtentechnik erkannt hat. Historisch haben verschiedene Personen vorher ähnliche Aussage gefunden, z.B. Nyquist, Whittaker und Kotelnikov.

- **Beweis:** (nach [Jon91]) Sei $t_n := n\Delta t$. Die Fourier-Transformation von $x(t)$ ist null außerhalb von $[-W, W]$. Damit folgt:

$$x(t) = \int_{-W}^W X(f) e^{j2\pi f t} df.$$

Sei $X^{(p)}(f)$ die periodische Fortsetzung von $X(f)$ mit Periode $2W$, dann kann dieses als Fourier-Reihe geschrieben werden:

$$X^{(p)}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{2W} f}$$
$$c_k = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W X(f) e^{-j2\pi \frac{k}{2W} f} df.$$



- **Beweis: (ctd.)** Vergleicht man die inverse Fourier-Transformation und die Fourier-Reihe, so beobachtet man $c_k = \frac{1}{2W}x\left(-\frac{k}{2W}\right)$. Wegen

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2W}x\left(-\frac{k}{2W}\right) e^{j2\pi \frac{k}{2W}f} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2W}x\left(-\frac{k}{2W}\right) \right| < \infty$$

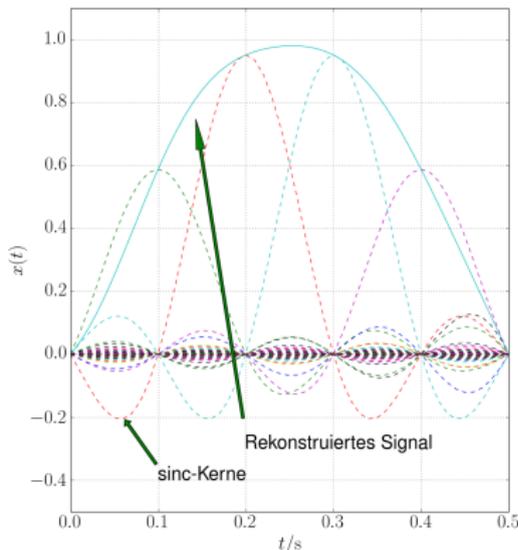
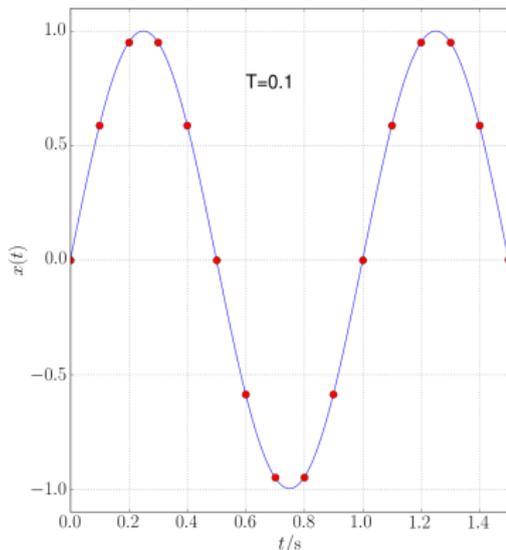
konvergiert die linke Seite gleichmäßig, weswegen Summation und Integration vertauscht werden darf. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-W}^W \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2W}x\left(-\frac{k}{2W}\right) e^{j2\pi \frac{k}{2W}f} e^{j2\pi ft} df \\ &= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2W}x\left(\frac{k'}{2W}\right) \int_{-W}^W e^{j2\pi(t-\frac{k'}{2W})f} df, \end{aligned}$$

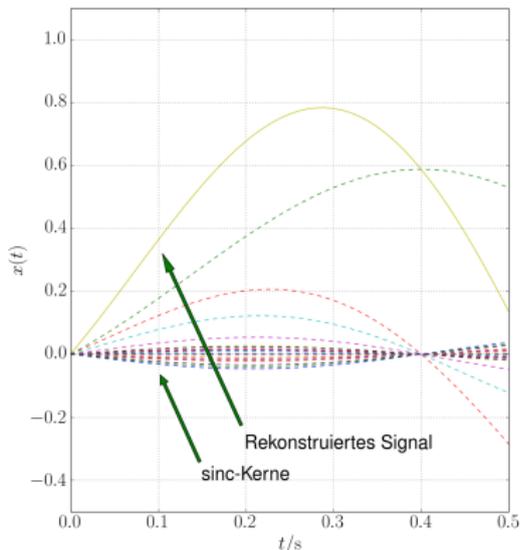
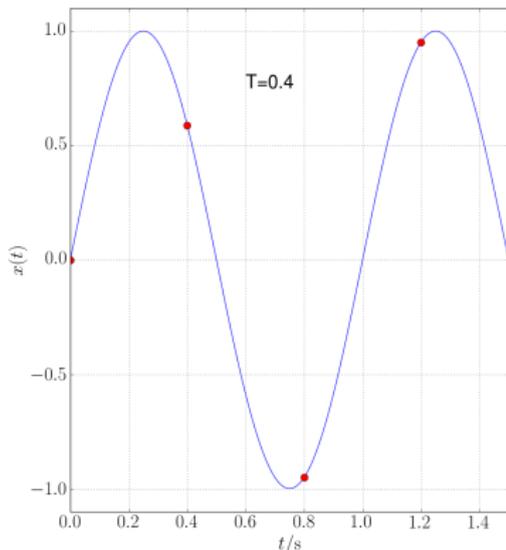
was die Aussage nachweist. ■



- **Beispiel:** Sinusfunktion $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ mit $f_0 = 1\text{Hz}$ und $t_s = 0.1\text{s}$:

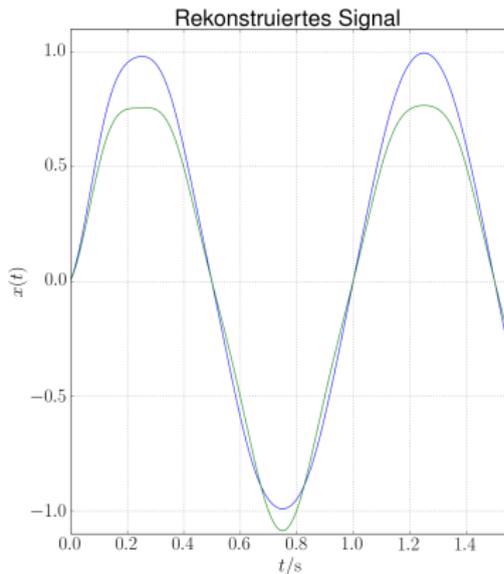
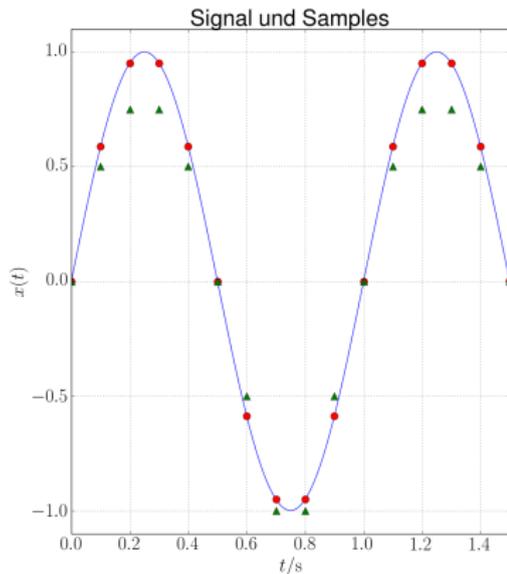


- **Beispiel:** Sinusfunktion $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ mit $f_0 = 1\text{Hz}$ und $t_s = 0.4\text{s}$:

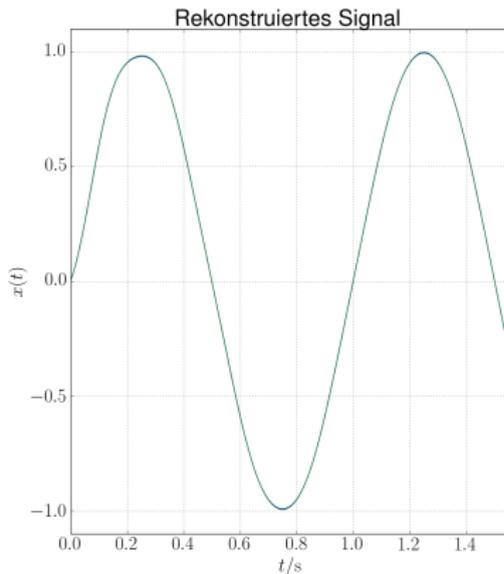
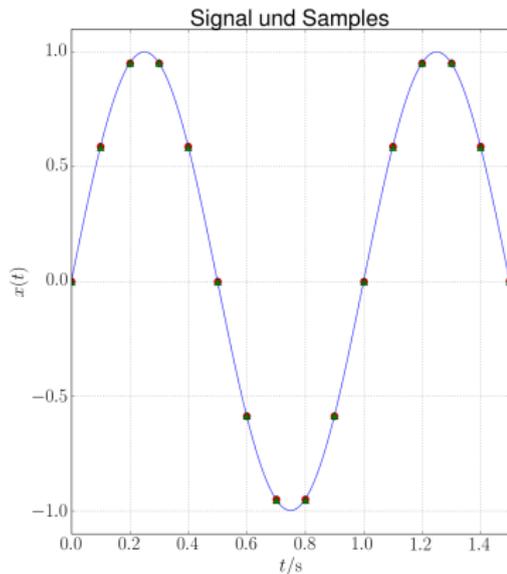


- Das Abtasttheorem ist eine theoretische Aussage. Verschiedene reale Fehler müssen berücksichtigt werden.:
 - Quantisierungsfehler: Durch endliche Wortlänge differiert der A/D-Ausgang von den realen Werten.
 - Fehler durch Fensterung (leakage): Letztlich kann immer nur ein gefensterter Teil eines bandbegrenzten Signals beobachtet werden. Wichtig: Bandbegrenzte Signale können niemals zeitbegrenzt sein.
 - Fehler durch Aliasing: Signale sind niemals echt bandbegrenzt. Somit ergeben sich durch periodische Wiederholung des Spektrums Fehler (siehe Beweis des Abtasttheorems).
 - Fehler durch Jitter: Reale Abtastzeiten differieren von theoretischen Abtastzeiten aufgrund von zeitlichen Abweichungen.

- **Beispiel:** Sinusfunktion $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ mit $f_0 = 1\text{Hz}$ und $t_s = 0.1\text{s}$ und 3 Bit Quantisierung:



- **Beispiel:** Sinusfunktion $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ mit $f_0 = 1\text{Hz}$ und $t_s = 0.1\text{s}$ und 8 Bit Quantisierung:



■ Bemerkungen:

- Das Abtasttheorem bleibt gültig, wenn kleinere Abtastzeiten $t'_s < 1/(2W)$ gewählt werden.
- Der absolute Wert der Abtastzeiten ist nicht relevant. Nur deren Abstand ist durch das Abtasttheorem begrenzt.
- Wie im Beweis gesehen ist das Signal vollständig durch seinen Frequenzgehalt in $[-W, W]$ beschrieben. Wenn abgetastete Signale mit Abtastzeit t_s betrachtet werden, nennt man $[-\frac{1}{2t_s}, \frac{1}{2t_s}]$ das *Nyquistband*.
- Zur Vereinfachung erfolgt der Beweis des Abtasttheorems für L_1 Funktionen. [Gallager] liefert auch einen Beweis in L_2 .
- Als Nebenprodukt des Beweises des Abtasttheorems folgt die Tatsache, dass periodische Fourier-Transformationen zu diskreten Zeitfunktionen führen (und aufgrund Dualität vice versa).

■ Bemerkungen: (ctd.)

- Das Abtasttheorem kann als Reihenentwicklung im System

$$\varphi_n(t) := \frac{\sin(2\pi W(t - nt_s))}{2\pi W(t - nt_s)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

betrachtet werden, wobei

$$\int \varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = \frac{1}{2W}\delta_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2W}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

- Wegen $\varphi_k(lt_s) = \delta_{k\ell}$ ist das Signal $x(t)$ in $t_\ell = lt_s$ vollständig durch $x(t_\ell)$ bestimmt. Falls t' kein Abtastzeitpunkt ist, hängt $x(t')$ (prinzipiell) von allen Funktionen $\varphi_k(t)$ ab. Der Einfluss $\varphi_k(t)$ sinkt mit zunehmendem Abstand von t' und t_k .

- 1 Digitale Signalverarbeitung, Basics
 - Signale und Fourier-Transformation
 - Das Abtasttheorem
 - Diskrete Signale und zeitdiskrete Fourier-Transformation
 - Die z-Transformation
 - Systemtheorie zeitdiskreter Systeme
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



- Gemäß Abtasttheorem ist die Verwendung zeitdiskreter Signale ausreichend. Durch Übertragen der jeweiligen Definitionen ergibt sich:

■ Definitionen:

- Ein *zeitdiskretes Signal* ist eine Abbildung $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$.
- Die Menge der Signale mit *endlicher Energie* wird bezeichnet durch

$$\ell_2 := \left\{ x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : E_x := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \right\}.$$

- Ein Signal hat *endliche Leistung*, falls

$$0 < P_x := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 < \infty.$$



■ Bemerkungen:

- Die Menge ℓ_2 ist ein Vektorraum. Versieht man ℓ_2 mit Innenprodukt und Norm gemäß

$$\langle x[n], y[n] \rangle := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n], \quad x[n], y[n] \in \ell_2$$

$$\|x[n]\| := \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}, \quad x[n] \in \ell_2$$

so wird es ein Hilbertraum.

- Die Mengen

$$\ell_p := \left\{ x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p < \infty \right\}$$

bilden Vektorräume mit Norm $\|x\|_p := (\sum_n |x[n]|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Definition

Die *zeitdiskrete Fourier-Transformation*, *discrete-time Fourier transformation*, *DTFT*, eines Signals $x[n]$ ist⁹:

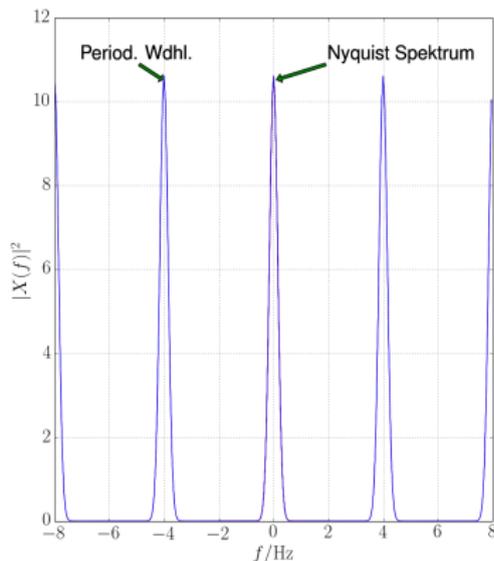
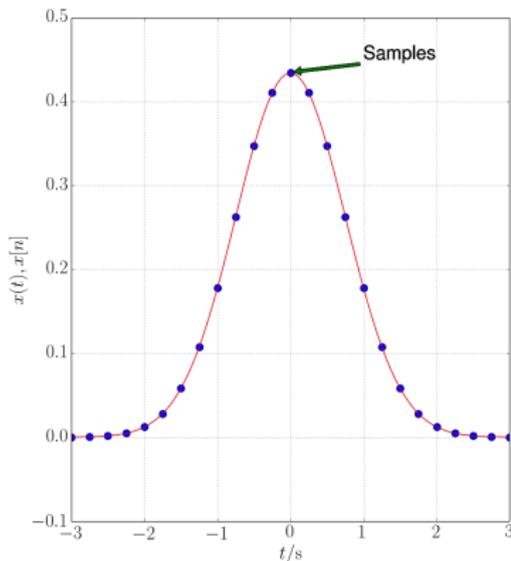
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fnt_s},$$
$$x[n] = \frac{1}{f_s} \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} X(f)e^{j2\pi fnt_s} df, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die DTFT ist periodisch mit der Periode f_s .

Wurde das Abtasttheorem eingehalten, ist das Signal durch seinen Frequenzgehalt im *Nyquistband* $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}] = [-\frac{1}{2t_s}, \frac{1}{2t_s}]$ vollständig beschrieben.

⁹ . . . falls die Summe konvergiert, z.B. falls $x \in \ell_1$.

- **Beispiel:** Abtastung eines Gaußpulses mit $t_s = 0.25s$



■ Bemerkungen:

- Mittels der *normierten Frequenz* $\Omega = 2\pi f t_s = \omega t_s$ wird die DTFT zu

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}, \quad \Omega \in [-\pi, \pi]$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- Alle Eigenschaften der FT bleiben mit entsprechenden Anpassungen gültig.
- Zur Unterscheidung der Transformaten verwenden manchen Autoren bei diskreten Signalen die Schreibweise $X(e^{j\Omega})$.¹⁰
- In [Gal08] ist ein Beweis für die Existenz der DTFT in ℓ_2 gegeben.
- Zeitdiskrete Signale entsprechen periodischen Fourier-Transformationen.

¹⁰Motivation: Entstehen der Fourier-Transformationen aus s - bzw. z -Transformation.



Definition

Beschränkt man $x[n]$ auf N Samples und tastet $X(f)$ mit $\Delta f = 1/(Nt_s)$ ab – entsprechend $\Delta\Omega = 2\pi/N$ – so ergibt sich die *Diskrete Fourier-Transformation*, *DFT*:¹¹

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

¹¹ **Übung:** Zeigen Sie, dass obige Gleichung die Inverse DFT beschreibt.

■ Bemerkungen:

- Die DFT ist eine Abbildung zwischen diskreten und periodischen Folgen. Beachten Sie, dass implizit stets gilt:

$$x[n] = x[n + \nu N], \quad X[k] = X[k + \kappa N], \quad \nu, \kappa \in \mathbb{Z}$$

- Die DFT entspricht abgetasteten Werten der DTFT. Es folgt:

$$x(0), x(t_s), \dots, x((N-1)t_s) \circ \bullet X(0), X\left(\frac{1}{N}f_s\right), \dots, X\left(\frac{N-1}{N}f_s\right)$$

- Berechnung der DFT erfolgt effizient durch die *Fast Fourier Transformation (FFT)* falls $N = 2^m$.
- Die DFT kann mit $\mathbf{A}_{\text{DFT}} = (e^{-j2\pi kn/N})_{kn}$ als Matrix-Vektor-Gleichung $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{\text{DFT}}\mathbf{x}$ dargestellt werden. Die inverse Operation lautet $\mathbf{A}_{\text{IDFT}} = \frac{1}{N}\mathbf{A}_{\text{DFT}}^H$.

- **Beispiel:** (nach [PJ15]) DFT der komplexen harmonischen Schwingung $x[n] = e^{j2\pi f_0 n t_s}$ mit N Samples liefert

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi (f_0 n t_s - \frac{kn}{N})} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi (f_0 t_s N - k) \frac{n}{N}}$$

- Fall 1: Falls $f_0 t_s N = \ell \in \mathbb{N}$, so folgt

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi (\ell - k) \frac{n}{N}} = N \cdot \delta_{k\ell}.$$

Sprich: Falls die Frequenz des Signals zum Beobachtungsfenster „passt“, ergibt sich das erwartete Resultat.¹²

¹²Beachte die Periodizität; dadurch kann stets angenommen werden, dass $0 \leq \ell \leq N - 1$.

■ Beispiel: (ctd.)

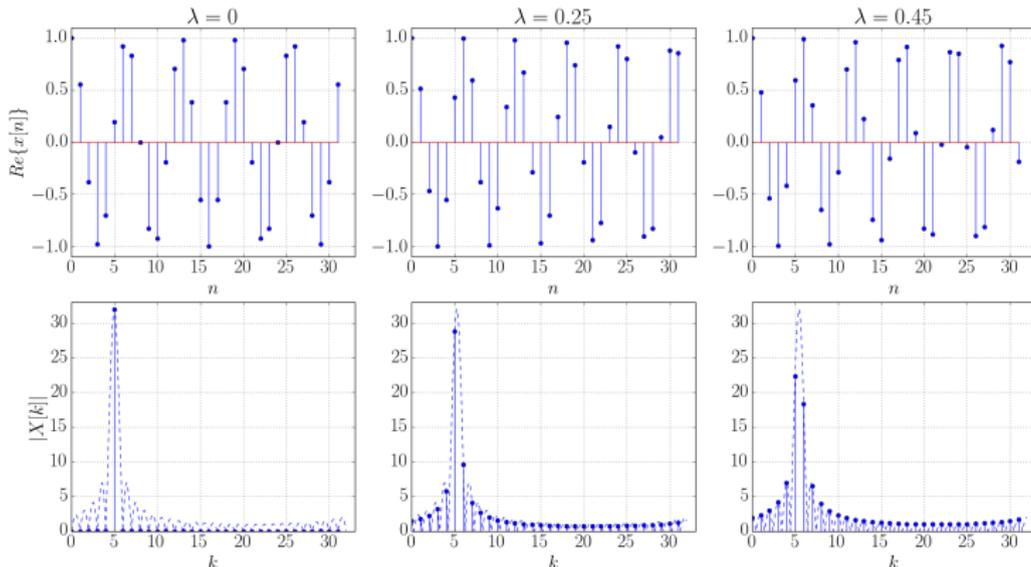
- Fall 2: Für $f_0 t_s N \notin \mathbb{N}$ folgt $f_0 t_s N = \ell + \lambda$, $|\lambda| < \frac{1}{2}$ und die DFT wird:¹³

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(\ell+\lambda-k)\frac{n}{N}} = \frac{1 - e^{j2\pi(\ell+\lambda-k)}}{1 - e^{j2\pi(\ell+\lambda-k)\frac{1}{N}}} \\ &= e^{j\pi(\ell+\lambda-k)\frac{N-1}{N}} \frac{\sin(\pi(\ell+\lambda-k))}{\sin(\pi(\ell+\lambda-k)\frac{1}{N})} \end{aligned}$$

Da die Frequenz der Harmonischen nicht zur DFT passt, ergibt sich kein reiner Dirac, sondern die Energie wird in andere Frequenzen „geleaked“. Deshalb heißt der Effekt *Leakage*.

¹³Erinnerung: $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$, $q \neq 1$.

- **Beispiel: (ctd.)** Plots für $\ell = 5, \lambda = 0, 0.25, 0, 45$



- **Beachte:** Auflösung der DFT wird durch die Beobachtungslänge bestimmt.
- **Aber:** Das Signal wurde bereits gesampelt, wie kann also die Auflösung erhöht werden?
- **Lösung:** Künstliches Erhöhen der Sample-Anzahl durch Anhängen von Nullen, genannt *Zero Padding*; mit $N' \gg N$ folgt:

$$\sum_{n=0}^{N'-1} x[n]e^{j2\pi\frac{kn}{N'}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j2\pi\frac{kn}{N}},$$

d.h. die Frequenz wird mit $\frac{k}{N'}$ statt mit $\frac{k}{N}$ abgetastet.

- **Beispiel:** „Stetige“ Fourier-Transformationen im Beispiel der Harmonischen wurden durch Zero Padding erzeugt.

- 1 Digitale Signalverarbeitung, Basics
 - Signale und Fourier-Transformation
 - Das Abtasttheorem
 - Diskrete Signale und zeitdiskrete Fourier-Transformation
 - **Die z-Transformation**
 - Systemtheorie zeitdiskreter Systeme
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



Definition

Die *z-Transformation* eines zeitdiskreten Signals $x[n]$ lautet

$$X(z) := \mathcal{Z}\{x[n]\} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

falls die rechte Seite ein nicht-leeres Konvergenzgebiet besitzt. Nach Cauchyschem Integralsatz¹⁴ ergibt sich die inverse Transformation¹⁵ zu

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

wobei C ein einfacher geschlossener Weg im Konvergenzgebiet ist.

¹⁴Welcher besagt, dass $\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-1}dz = \delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$.

¹⁵Praktisch erfolgt die Inversion über Tabellen, Residuensatz und Partialbruchzerlegung.

■ Wegen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

ist es notwendig, dass beide Summen konvergieren. Über die Definitionen¹⁶

$$R_2 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x[n]|}, \quad R_1 := \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x[-n]|} \right]^{-1}$$

ergibt sich das Konvergenzgebiet als Kreisring¹⁷

$$A_c := \{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z| < R_1\}.$$

¹⁶Erinnerung: Eine Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ konvergiert für $|z| < R := \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$.

¹⁷Beachte: $A_c = \emptyset$, $A_c = \mathbb{C}$ möglich; Werte 0 und ∞ sind zulässig; Konvention: $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$.

■ Beispiele:¹⁸

■ Zeitdiskreter Dirac

$$x[n] = \delta[n] := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \circ \bullet X(z) = 1, A_c = \mathbb{C}$$

■ Einseitige Exponentialfunktion

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \circ \bullet X(z) = \frac{z}{z-a}, A_c = \{z \in \mathbb{C} : |z| > |a|\}.$$

■ Zeitdiskrete Sprungfunktion

$$x[n] = \sigma[n] := \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \circ \bullet X(z) = \frac{z}{z-1}, A_c = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

¹⁸Übung: Nachweis



■ Eigenschaften:¹⁹

$$ax[n] + by[n] \circ \bullet aX(z) + bY(z) \quad \text{Linearität}$$

$$x[n - n_0] \circ \bullet z^{-n_0} X(z) \quad \text{Zeitverzögerung}$$

$$a^n x[n] \circ \bullet X\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{Modulation}$$

$$nx[n] \circ \bullet -z \frac{d}{dz} X(z) \quad \text{Ableitung}$$

$$x[n] * h[n] := \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[n - m]h[m] \circ \bullet X(z)H(z) \quad \text{Faltung}$$

- **Übung:** Bestimmen Sie die z-Transformation von $x^*[n]$ in Abhängigkeit von $X(z)$ $\bullet \circ x[n]$.

¹⁹Übung: Zeigen Sie deren Gültigkeit und überlegen Sie sich die Konvergenzgebiete



■ Bemerkungen:

- Falls das Konvergenzgebiet den Einheitskreis enthält, ergibt sich die DTFT aus der z-Transformation durch $z = e^{j\Omega}$. (**Übung**)
- Kausale Signale ($x[n] = 0, n < 0$) haben als Konvergenzgebiet den Bereich außerhalb eines Kreises; anti-kausale Signale ($x[n] = 0, n > 0$) besitzen Konvergenzgebiete, die innerhalb eines Kreises liegen.
- Die z-Transformation ist eine holomorphe Funktion in ihrem Konvergenzgebiet.
- Mittels $z = re^{j\phi}$ folgt

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\phi n},$$

so dass die z-Transformation eine Verallgemeinerung der DTFT ist. („durch geeignetes r kann man die Summe zur Konvergenz zwingen“)



- 1 Digitale Signalverarbeitung, Basics
 - Signale und Fourier-Transformation
 - Das Abtasttheorem
 - Diskrete Signale und zeitdiskrete Fourier-Transformation
 - Die z-Transformation
 - **Systemtheorie zeitdiskreter Systeme**
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



- **Definition:** Ein *System* ist ein Operator, der ein Eingangssignal $x[n]$ auf ein Ausgangssignal $y[n]$ abbildet:

$$y[n] = S\{x[n]\}.$$

Ein System heißt

- *linear*, falls

$$S\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aS\{x_1[n]\} + bS\{x_2[n]\}.$$

- *zeitinvariant*, falls

$$y[n] = S\{x[n]\} \implies y[n - n_0] = S\{x[n - n_0]\}.$$

- *Linear time invariant, LTI*, falls es linear und zeitinvariant ist.



- Wegen

$$x[n] = (x * \delta)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n - m]$$

folgt für LTI-Systeme: (→ Diskussion)

$$\begin{aligned} y[n] &= S \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n - m] \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]S \{ \delta[n - m] \} \\ &=: \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n - m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - m]h[m] \\ &= x[n] * h[n] \end{aligned}$$



Theorem

LTI-Systeme sind vollständig durch ihre *Impulsantwort*

$$h[n] := S\{\delta[n]\}$$

beschrieben. Der Ausgang ergibt sich durch Faltung des Eingangs mit der Impulsantwort:

$$y[n] = S\{x[n]\} = x[n] * h[n].$$



- **Übung:** Welchen Effekt haben Filter mit den folgenden Impulsantworten?
 - $h[n] = \delta[n - K]$
 - $h[n] = \sigma[n] - \sigma[n - K]$
 - $h[n] = a^n \sigma[n]$

Verwenden Sie diese zur Illustration der folgenden Begriffe.



- **Definition:** Ein System ist *Bounded Input Bounded Output (BIBO) stabil*, falls jede beschränkte Eingangsfolge auf eine beschränkte Ausgangsfolge führt:

$$\exists B_x : |x[n]| \leq B_x < \infty, \quad n \in \mathbb{Z} \implies \exists B_y : |y[n]| \leq B_y < \infty, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- **Theorem:** Ein LTI-System ist BIBO-stabil genau dann, wenn

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty,$$

d.h., falls die Impulsantwort absolut summierbar ist.

- **Beweis:**

- Hinreichend, weil . . .
- Notwendig, da für $x[n] := \frac{h[-n]}{|h[-n]|}$ und $|y[0]|$ folgt . . .



- **Definition:** Ein System heißt *kausal*, falls der Ausgang nur von aktuellen oder vergangenen Eingangswerten (und nicht von zukünftigen) abhängt.
- **Theorem:** Ein LTI-System ist kausal genau dann, wenn

$$h[n] = 0 \text{ für } n < 0.$$

d.h., falls die Impulsantwort ein kausales Signal ist.

- **Beweis: Übung**

- **Definition:** Ein System heißt *FIR-System* (*finite impulse response*), falls die Dauer der Impulsantwort endlich ist:

$$\exists M \leq N : h[n] = 0 \text{ für } n < M, n > N.$$

Sonst ist es ein *IIR-System* (*infinite impulse response*).

- **Bemerkung:** Ein FIR-System ist stets BIBO-stabil. (**Übung:** Überlegen)



- **Definition:** Die *Übertragungsfunktion* eines LTI-Systems ist die z-Transformierte der Impulsantwort:

$$H(z) := \mathcal{Z}\{h[n]\}.$$

- **Theorem:** Die z-Transformierte des Ausgangssignals eines LTI-Systems ist

$$Y(z) = X(z)H(z),$$

d.h., die Multiplikation der z-Transformierten des Eingangs und der Übertragungsfunktion.



- Für kausale LTI-Systeme folgt $h[n] = 0, n < 0$; damit ist

$$H(z) = \sum_{n \geq 0} h[n]z^{-n} \implies A_c = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z|\},$$

d.h., das Konvergenzgebiet ist die Region außerhalb eines gewissen Kreises.

- LTI-System stabil $\implies \sum_n |h[n]| < \infty \implies$ Einheitskreis liegt im Konvergenzgebiet



- **Definition:** Der *Frequenzgang* eines LTI-Systems ist²⁰

$$H(\Omega) := H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}.$$

Betragsgang und *Phasengang* des Systems sind:

$$|H(\Omega)|, \quad \varphi(\Omega) = \arg(H(\Omega)).$$

Durch Ableitung des Phasengangs entsteht die *Gruppenlaufzeit*

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{d}{d\Omega}\varphi(\Omega).$$

²⁰Falls die rechte Seite existiert, z.B. für kausale und stabile Systeme.



- **Theorem:** Komplexe Harmonische sind Eigenfunktionen von LTI-Systemen, wobei der Frequenzgang den Proportionalitätsfaktor angibt:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \implies y[n] = H(\Omega_0)e^{j\Omega_0 n}$$

- **Beweis:** Übung
- **Bemerkung:** Damit beschreibt $H(\Omega_0)$ die Wirkung des Systems auf die Frequenz Ω_0 . \implies Wichtige Interpretation bei Filterung, Phasendrehung, etc.



- **Definition:** Eine lineare *Differenzgleichung* mit konstanten Koeffizienten lautet:²¹

$$\sum_{\nu=0}^q a_{\nu} y[n - \nu] = \sum_{\mu=0}^p b_{\mu} x[n - \mu], \quad a_0 \neq 0$$

Für $a_1 = \dots = a_q = 0$ ist das System *nicht rekursiv*. Ist mindestens ein $a_i \neq 0$ ist das System *rekursiv*.

²¹ In dieser Formulierung ist das System bereits kausal.



- Durch z-Transformation der Differenzgleichung folgt:

$$\sum_{\nu=0}^q a_{\nu} Y(z) z^{-\nu} = \sum_{\mu=0}^p b_{\mu} X(z) z^{-\mu}$$

und somit

$$H(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^p b_{\mu} z^{-\mu}}{\sum_{\nu=0}^q a_{\nu} z^{-\nu}} = z^{q-p} \cdot \frac{\sum_{\mu=0}^p b_{p-\mu} z^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^q a_{q-\nu} z^{\nu}} = H_0 \cdot z^{q-p} \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^p (z - z_{0,\mu})}{\prod_{\nu=1}^q (z - z_{\infty,\nu})},$$

wobei $z_{0,\mu}$ und $z_{\infty,\nu}$ die Nullstellen und Pole der Übertragungsfunktion bezeichnen.



■ Bemerkungen:

- Sind alle Pole innerhalb des Einheitskreises, so ist das System kausal und stabil oder anti-kausal und instabil.
- Sind alle Pole außerhalb des Einheitskreises, so ist das System kausal und instabil oder anti-kausal und stabil.
- FIR-Systeme sind immer stabil und haben Pole nur im Ursprung. IIR-Systeme haben mindestens einen Pol außerhalb des Ursprungs.



- Man sieht:

$$|H(\Omega)| = |H_0| \frac{\prod_{\mu=1}^p |e^{j\Omega} - z_{0,\mu}|}{\prod_{\nu=1}^q |e^{j\Omega} - z_{\infty,\nu}|}$$

und

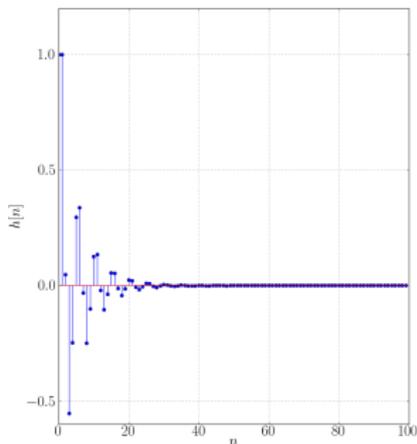
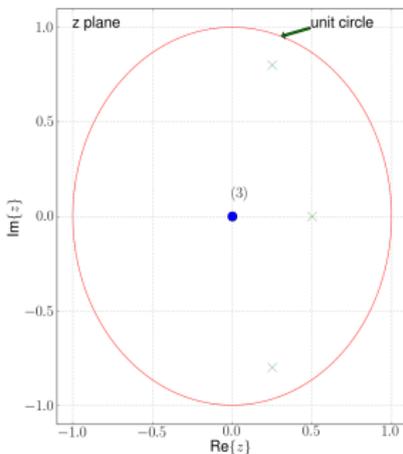
$$\varphi(\Omega) = \arg \left(H_0 \frac{\prod_{\mu=1}^p (e^{j\Omega} - z_{0,\mu})}{\prod_{\nu=1}^q (e^{j\Omega} - z_{\infty,\nu})} \right)$$

- **Übung:** Realisieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung von Betragsgang und Phasengang eines LTI-Systems basierend auf dessen Polen und Nullstellen.

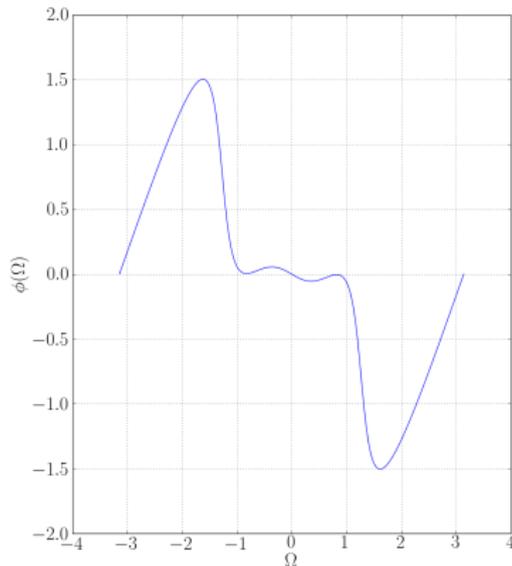
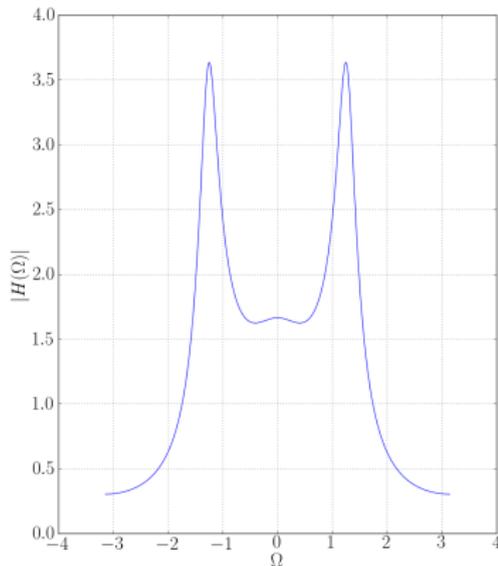


■ Beispiel:

$$H(z) = \frac{0.5z^3}{(z - 0.5)(z - (0.25 + 0.8j))(z - (0.25 - 0.8j))}$$



■ Beispiel: (ctd.)



■ Definition:

- Systeme mit $|H(\Omega)| = 1$ heißen *Allpass*.
- Ein System heißt *minimalphasig*, wenn keine Nullstellen außerhalb des Einheitskreises liegen, d.h., falls $|z_{0,\mu}| \leq 1$.

■ **Theorem:** Jedes kausale LTI-System kann in einen Allpass und ein Minimalphasensystem zerlegt werden.

■ **Beweis:** siehe beispielsweise [PJ15]

■ Bemerkungen: (nach [Pro96])

- Können Pole und Nullstellen gemäß²² $z_{0,\mu} = 1/z_{\infty,\nu}^*$ in Bezug gesetzt werden, so wird das System ein Allpass für $H_0 = \prod_{\nu} |z_{\infty,\nu}|$.
- Wegen $|H_{\text{ap}}(\Omega)| = 1$ wird der Betragsgang des Systems durch den Minimalphasenanteil bestimmt.
- Da gezeigt werden kann, dass $\tau_{g,\text{ap}}(\Omega) \geq 0$ gilt, folgt:

$$\tau_g(\Omega) = \tau_{g,\text{mp}}(\Omega) + \tau_{g,\text{ap}}(\Omega) \geq \tau_{g,\text{mp}}(\Omega).$$

D.h., Minimalphasensysteme haben die minimale Gruppenlaufzeit aller Systeme mit identischem Betragsfrequenzgang.

²²Umordnung kann notwendig sein.



■ Bemerkungen: (ctd.)

- Definiert man für ein kausales System die Teilenergie

$$E(n) := \sum_{k=0}^n |h[k]|^2,$$

so kann gezeigt werden, dass Minimalphasensysteme stets

$$E_{\text{mp}}(n) \geq E(n)$$

erfüllen, wenn alle System mit identischem Betragsfrequenzgang und identischer Gesamtenergie $E := \lim_{n \rightarrow \infty} E(n)$ betrachtet werden. Somit reagieren Minimalphasensysteme in dem Sinne schneller, dass sie „ihre Energie früher ausgeben“.



- **Definition:** Ein Minimalphasensystem heißt *invertierbar*, falls seine Nullstellen innerhalb²³ (“nicht nicht außerhalb“) des Einheitskreises liegen.
- Für kausale, stabile und invertierbare Systems ist die Übertragungsfunktions

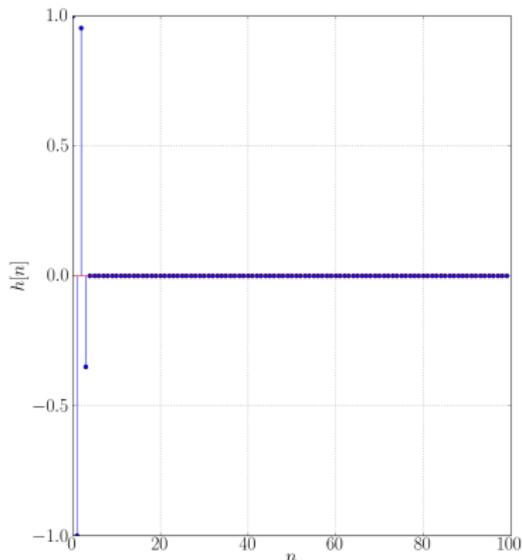
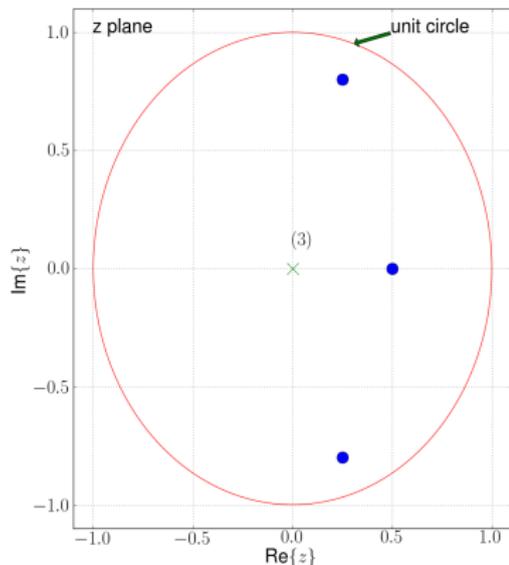
$$H(z) = H_0 \cdot z^{q-p} \frac{\prod_{\mu=1}^p (z - z_{0,\mu})}{\prod_{\nu=1}^q (z - z_{\infty,\nu})}, \quad |z_{0,\mu}|, |z_{\infty,\nu}| < 1.$$

Somit ist $G(z) := 1/H(z)$ ein stabiles Filter, das zu $H(z)$ invers ist.

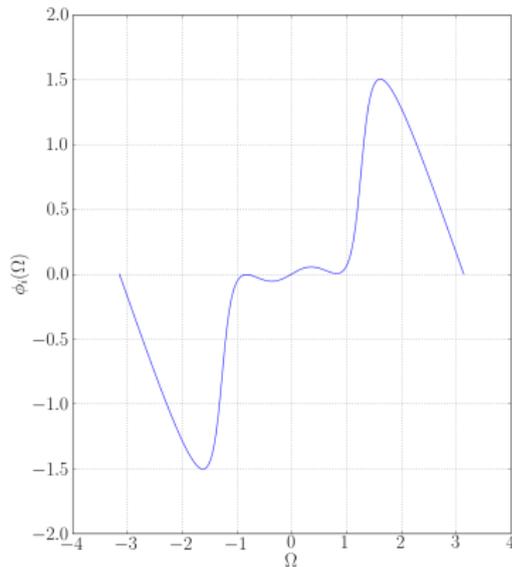
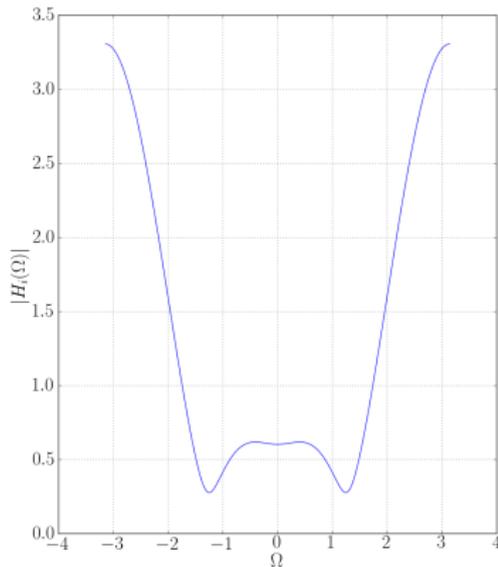
²³ **Frage:** Warum wird die Minimalphaseneigenschaft nicht direkt so definiert?



- **Beispiel:** Bestimme das inverse System zu dem System aus vorigem Beispiel



■ Beispiel: (ctd.)



- 1 Digitale Signalverarbeitung, Basics
 - Signale und Fourier-Transformation
 - Das Abtasttheorem
 - Diskrete Signale und zeitdiskrete Fourier-Transformation
 - Die z-Transformation
 - Systemtheorie zeitdiskreter Systeme
 - **Lernzielkontrolle**
 - Literatur



- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Energie- und Leistungssignale, Vektorräume zur Signaldarstellung
- Fourier-Transformation für Energie- und Leistungssignale und deren Eigenschaften; Wiener-Khintchin
- Abtasttheorem inkl. Interpretation und Eigenschaften
- Verwendung des Abtasttheorems zur Übertragung von Fourier ins Zeitdiskrete
- Eigenschaften der DFT („Wo muss man aufpassen?“)

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- z-Transformation und Konvergenzgebiete; Bedeutung der Konvergenzgebiete im Kontext der Systemtheorie (kausal, antikausal, ...)
- Begriffe der Systemtheorie (Kausalität, Stabilität) in Zeit- und Frequenzbereich
- Charakterisierung des Systemverhaltens durch Übertragungsfunktion, Differenzgleichung, Polynome, Pol-Nulstellen, etc.
- Allpass und Minimalphasensystem: Eigenschaften und Nutzen



- 1 Digitale Signalverarbeitung, Basics
 - Signale und Fourier-Transformation
 - Das Abtasttheorem
 - Diskrete Signale und zeitdiskrete Fourier-Transformation
 - Die z-Transformation
 - Systemtheorie zeitdiskreter Systeme
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



- [KK98] K.-D. Kammeyer, K. Kroschel, *Digitale Signalverarbeitung*, Teubner, 1998
- [PJ15] F. Puente Leon, H. Jäkel, *Signale und Systeme*, Oldenbourg, 2015
- [Gal08] R. Gallager, *Principles of Digital Communications*, Cambridge University Press, 2008
- [Lap09] A. Lapidoth, *A Foundation in Digital Communication*²⁴, Cambridge University Press, 2009
- [Urk83] H. Urkowitz, *Signal Theory and Random Processes*, Artech House, 1983
- [Jon91] F. Jondral, *Funksignalanalyse*, Teubner, 1991
- [Pro96] J. Proakis, D. Manolakis, *Digital Signal Processing*, 3rd edition, Prentice Hall, 1996

²⁴online erhältlich unter: http://www.afidc.ethz.ch/A_Foundation_in_Digital_Communication/Home.html

